Dr.sc. IVAN MAVRIĆ
Fakultet strojarstva i brodogradnje
Zagreb, Ivana Lučića 5

Izvorni znanstveni članak - Original scientific paper
UDK: 629.119: 519.6
Primljeno - Accepted: 23.05.1995.
Prihvaćeno - Approved: 19.06.1995.

ANALIZA I OPTIMIZACIJA REMONTNE RADIONICE POMOĆU ANALITIČKE METODE

SAŽETAK

U referatu je predočena analitička metoda za određivanje optimalnog broja skladištara u velikoj servisnoj radionici. Metoda je utemeljena na teoriji masovnog posluživanja (TMP). Ukratko su opisani koncepcija, osnovna načela i ograničenja ove teorije. Na konkretnim primjerima sustava masovnog posluživanja (SMP) kreiran je odgovarajući matematički model. Na temelju matematičkog modela određene su i analizirane kvantitativne značajke razmatranih varijanata SMP. Na kraju, predočeni su i razmotreni najvažniji kvantitativni pokazatelji, te osnovni parametri optimizacije i optimalni model SMP.

1. UVOD

Tijekom projektiranja ili pak rekonstrukcije proizvodnih ili remontnih radionica često ne postoji samo jedno alternativno rješenje. Zadaća je projektanta pronaći optimalno rješenje polazeći od nekih pokazatelja ekonomičnosti. Složenost problema primorala je projektante da uporabe novi metodološki pristup koji se temelji na sustavnoj analizi kao postupku istraživanja i donošenja odluka.

Jedan od značajnijih oblika sustavne analize je operacijsko istraživanje. Klasična zadaća operacijskih istraživanja je problem redova. Red nastaje kada neki subjekt koji se ima poslužiti ili pak zahtjev stigne na mjesto posluživanja koje je zauzeto drugom uslugom koja se trenutačno obavlja. Ako su poznate zakonitosti dolaska subjekata (ili zahtjeva) i posluživanja, red se tada može matematički analizirati.

Analitički postupci za rješavanje takvih zadaća poznati su pod nazivom "teorija redova ili "teorija masovnog posluživanja". Potonji se postupci temelje na teoriji vjerojatnosti i omogućuju analizu i ocjenu 'sustava masovnog posluživanja', određivanje karaktera reda i stupanj zadovoljavanja pristiglih zahtjeva za posluživanje u svezi s različitim strukturama sustava. Istim se postupkom može odabrati optimalan model sustava.

U ovom se radu razmatra otvoreni model sustava za masovno posluživanje neograničenog toka za koji zahtjevi za uslugu stižu prema Poissonovoj raspodjeli i obavljaju se prema redoslijedu dolaska. Druga pretpostavka podrazumijeva da je raspodjela posluživanja približno eksponencijalna. Iako se čini da je broj pretpostavaka za ovaj model sustava masovnog posluživanja velik, on se može široko primijeniti u praksi i istodobno biti temelj za proučavanje složenijih modela.

ANALYSIS AND OPTIMIZATION OF THE REPAIR WORKSHOPS BY AN ANALYTICAL METHOD

SUMMARY

The paper presents an analytical method for determining optimal number of servicer in a big repair workshop. This method is based on the theory of mass servicing (TMS). A short description of basic concept, principles and limitations of this theory is given. The adequate mathematical model is created on the concrete examples of the mass servicing system (MSS). On the basis of this mathematical model, the quantitative characteristics for all variants of MSS are defined and analyzed. Finally, the most important quantitative characteristics, basic parameters of the optimization goals and an optimal solution for analyzed variants are presented and discussed.

1. INTRODUCTION

In the process of design or reconstruction of production or repair workshops often there is more than one alternative solution. The task of the designer is to find optimal solution starting from some economy indicators. The complexity of the problem forced designers to apply new methodological approach which is based on systematic analysis as a method of research and decision making.

One of the more important aspects of system analysis is known as operations research. The classical task of operations research is a problem of queue. The queue is initiated when an element to be serviced or a request for work arrives at the work position which is occupied by the other work in progress. If the law of arrival of the elements for servicing (or requests for work) is known and if order of operations and a time required for processing are known, then the queue can be analyzed mathematically.

Analytical methods for solving such tasks are known as 'Theory of Queues' (TQ) or as a 'Theory of Mass Servicing' (TMS). TMS methods are founded on probability theory and make possible the analysis and estimate of the 'Mass servicing System' (MSS), determining the character of the queue and show the level of satisfying arrived servicing requests for different system structures. Bý the same method it is possible to select the optimal model.

In this work an opened model of MSS with unlimited flow for which servicing requests arrive according to the Poisson's distribution and are serviced in the order of arrival, is discussed. The other assumption is that the distribution of servicing is approximately exponential. Although the number of assumptions for the model MSS looks high, it was found that it can be applied in practice and at the same time provide a basis for the study of more sophisticated models.

2. USTROJ SUSTAVA MASOVNOG POSLUŽIVANJA

Sustav masovnog posluživanja podrazumijeva skup subjekata kojima se pruža usluga, od kojih stiže tok zahtjeva za davanje usluga, i od subjekata koji obavljaju te usluge. Primjer takvog sustava je npr. remontna radionica sa svim radnim mjestima i djelatnicima, zajedno sa skladištem i skladištarom koji poslužuje djelatnike novim dijelovima. Svojstveno je sustavima ove vrste da potražnja za uslugom ne odgovara točno kapacitetu posluživanja što ima za posljedicu s jedne strane stvaranje redova ili pak s druge strane besposlenost. Kao što je već ranije spomenuto u ovome radu, razmatrat će se otvoreni sustav s jednostavnim tokom zahtjeva. Značajke tog sustava su stacionarnost, jednostavnost i neovisnost [1].

Stacionarnost pretpostavlja tok zahtjeva koji ne pokazuje promjenu srednjeg broja zahtjeva s vremenom.

Jednostavnost toka znači da je vjerojatnost prispijeća više od jednog zahtjeva u isto doba bezgranično mala.

Neovisnost toka znači da vjerojatnost prispijeća većeg broja zahtjeva u nekom vremenskom razmaku ne ovisi o broju zahtjeva koji su prispjeli u sustav prije tog razdoblja.

Tok zahtjeva koji posjeduje sve spomenute značajke može se kvantitativno opisati Poissonovom zakonitošću raspodjele [1], [2], ako je poznat parametar toka tj. srednji broj zahtjeva u jedinici vremena:

$$P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!} \quad (k = 0, 1, 2,...) \qquad (1)$$

gdje je $P_k(t)$ vjerojatnost da u vremenskom razdoblju 0 - t stiže k zahtjeva za uslugom i gdje je k diskretna (nije kontinuirana) slučajna varijabla, λ je srednji broj zahtjeva u jedinici vremena. Ako se zna $P_k(t)$ za k = 1, 2, 3,...., vjerojatnost da u vremenu t ne stigne više od n zahtjeva, može se odrediti iz

$$P(k \le n) = \sum_{k=0}^{n} P_k(t) \qquad (2)$$

Druga važna posljedica Poissonova toka je da ako t predstavlja slučajnu varijablu za vremensko razdoblje između susjednog prispijeća zahtjeva za uslugom, koji slijede jedan za drugim, tada se t raspodjeljuje sukladno eksponencijalnoj distribuciji s parametrom λt, što ima funkciju gustoće raspodjele:

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \qquad (3)$$

Analitički postupci teorije masovnog posluživanja nameću izvjesna ograničenja i za zakonitosti raspodjele posluživanja, koja bi također morala imati eksponencijalnu distribuciju (ili joj pak biti vrlo blizu), s funkcijom gustoće vjerojatnosti kako je dano [1]:

$$f(t) = \mu e^{-\mu t} \qquad (4)$$

gdje je μ parametar posluživanja (tj. broj obavljenih usluga u jedinici vremena).

Ako posluživanje ima eksponencijalnu distribuciju proizlazi da je srednja gustoća posluživanja μ - broj usluga u jedinici vremena. Srednje vrijeme posluživanja može se interpretirati kao srednja vrijednost varijable t. Temeljem (4) proizlazi da je srednje vrijeme posluživanja $1/\mu$. Vjerojatnost da će vrijeme posluživanja biti jednako t ili iznad, daje se kao:

$$P(t \ge t_0) = e^{-\mu t_0} \qquad (5)$$

2. STRUCTURE OF THE MASS SERVICING SYSTEM (MSS)

MSS assumes the complex of objects being serviced, from which a stream of requests for servicing arrives, and of the object which that servicing perform. Example of that system is e.g. repair workshop with all work places and workers together with store and servicer, which service those workers with renewal parts. It is typical for systems of that kind that demand for servicing does not match exactly the inflow of requests which as a consequence produces queuing on one side or idleness on the other. As mentioned earlier in this work an opened system with a simple flow of requests will be treated. Characteristics of that system is stationarity, ordinarity and independence [1].

Stationarity - assumes the flow of requests which does not change it's mean number of requests with time.

Ordinarity - of flow means that the probability or arrival of more than one request at the same instant is infinitely small.

Independence - of the flow means that the probability of the arrival of a number of requests in any interval of time does not depend on the number of requests that arrived in the system before that interval.

The flow of requests that has all mentioned characteristics may be quantitatively described by the Poisson's law of distribution [1], [2], if a parameter of flow (i.e. mean number of requests per time unit) is known,

$$P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!} \quad (k = 0, 1, 2,...) \qquad (1)$$

where: $P_k(t)$ is the probability that in the period of time 0 - t arrives k requests for servicing and where k is a discreet (non continous) random variable; λ is mean number of requests per time unit. Knowing $P_k(t)$ for $k = 1, 2, 3,...$, the probability that in the time t does not arrive more than n requests, may be found from:

$$P(k \le n) = \sum_{k=0}^{n} P_k(t) \qquad (2)$$

The other important consequence of the Poisson flow is, that if t represents a random variable for the time between successive arrivals of requests for servicing, which follow one after the other, than t is distributed according to the exponential distribution with parameter λt, with the function of the density of distribution:

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \qquad (3)$$

The analytical methods of the theory of mass servicing put certain constraints to the law of distribution of servicing, which should have exponential distribution too (or very close to it), with the function of the density of probability given as [1]:

$$f(t) = \mu e^{-\mu t} \qquad (4)$$

where μ - is the parameter of servicing (i.e. number of performed services per time unit).

If the servicing has an exponential distribution it follows that the mean density of servicing is μ - a number of servicings per time unit. The mean time of servicing may be interpreted as a mean value of the variable t. From (4) it follows that the mean time of servicing is $1/\mu$. The probability that the time for servicing equals t or more, is given as.

$$P(t \ge t_0) = e^{-\mu t_0} \qquad (5)$$

Analogija između toka zahtjeva prema Poissonovoj distribuciji i posluživanje prema eksponencijalnoj zakonitosti može se interpretirati kako slijedi.

Ako je k broj mogućih usluga u vremenu t, tj. broj zahtjeva koji se mogu prihvatiti u vremenu t, ako mjesta za pružanje usluga neprestano rade, tada k slijedi Poissonovu distribuciju s parametrom μt:

$$P_k(t) = \frac{(\mu t)^k e^{-\mu t}}{k!} \tag{6}$$

Da bi se provjerilo da li empirijski podaci za tok zahtjeva i posluživanje slijede Poissonovu odnosno eksponencijalnu distribuciju, može provesti test χ^2, ili Poissonov indeks disperzije kod malog broja podataka [2]. Da bi se zorno predstavila primjena ovog postupka dat će se neki primjeri. Podaci o sustavu odredit će se jednostavnim izrazima koji sadrže: matematičko očekivanje srednjeg broja zahtjeva u redu, srednje vrijeme zahtjeva što čekaju uslugu, srednje vrijeme koje skladištar provodi besposlen, itd.

3. MODEL SUSTAVA ZA MASOVNO POSLUŽIVANJE S JEDNIM POSLUŽITELJEM

Za razliku od zatvorenog modela sustava za masovno posluživanje ograničenog toka [3], ovdje će se razmatrati otvoreni model neograničenog toka. Takav model omogućuje izvjesno pojednostavnjenje matematičkog modela, pa se taj postupak može uporabiti kada je broj zahtjeva za uslugom vrlo visok [4]. Primjer takvog toka je tok djelatnika radionice prema skladištu za nove dijelove.

Primjer koji se analizira je velika remontna radionica koju poslužuje jedan skladištar. Pri normalnom radnom opterećenju remontne radionice, na temelju empirijskih podataka, tijekom radnog sata u prosjeku stigne 15 zahtjeva (radnika) za posluživanje, tj. $\lambda = 15$ (ili 0,25/min). Skladištar u prosjeku posluži 33,5 zahtjeva u jednom satu, tj. $\mu = 33{,}5$ (ili 0,558/min.). Srednje vrijeme posluživanja je $1/\mu = 1{,}79$ minuta. Na temelju teorije masovnog posluživanja [1], poznato je da kod sustava masovnog posluživanja neograničenog toka zahtjeva red neće beskonačno rasti samo ako je

$$\psi = \frac{\lambda}{\mu} \leq s \tag{7}$$

gdje je s broj poslužitelja.

U našem primjeru: $\psi = \dfrac{0.25}{0.558} = 0.448 < s = 1$

Vjerojatnost da ne postoji nikakav zahtjev za uslugom u sustavu za masovno posluživanje, tj. vjerojatnost da su svi pristigli zahtjevi (radnici) bili posluženi i da nema onih koji čekaju, definira se kao

$$p_0 = 1 - \psi \tag{8}$$

$$p_0 = 1 - 0.448 = 0.552$$

Vjerojatnost da postoji k zahtjeva u sustavu za masovno posluživanje može se izračunati prema rekurzivnom izrazu [4]:

$$p_k = \psi p_{k-1}; \quad p_1 = \psi p_0; \quad p_2 = \psi p_1 \quad \text{i t.d.} \tag{9}$$

ili: $p_k = \psi^k p_0 = \psi^k (1 - \psi)$

The analogy between flow of requests according to the Poisson's distribution and servicing according to the exponential law, may be interpreted as:

If k is the number of possible servicings in time t, i.e. the number of requests which could be serviced in time t if the places of servicing is working continuously, then k follows the Poisson's distribution with parameter μt:

$$P_k(t) = \frac{(\mu t)^k e^{-\mu t}}{k!} \tag{6}$$

To check weather the empirical data for the flow of requests follow Poisson's or exponential distribution, a χ^2 test may be performed if theoretical frequencies or Poisson's dispersion index, can be found from a small number of data [2].

In order to demonstrate application of the method some examples will be shown. Information about the system are to be found by the simple formulae comprising: mathematical expectation of the mean number of requests in the queue, mean time of the request weighting for servicing, mean idle time of the servicer, e.t.c.

3. MSS MODEL WITH ONE SERVICER

As a difference to the closed MSS model with limited flow [3], here the open model with unlimited flow will be reviewed. Such model makes possible certain simplification of the mathematical model and it is possible to apply the method when the number of requests for servicing may be very high [4]. The example of such flow is a flow workshop workers to the store for renewal parts.

As an example to be analyzed, a big repair workshop with store served by one servicer. With normal work load of the repair workshop, on the bases empirical data through the work hour on average 15 requests (workers) for servicing arrive, i.e. $\lambda = 15$ (or 0,25/min). The store servicer on average serves 33,5 requests through the one hour, i.e. $\mu = 33{,}5$ (or 0,558/min). The mean time of servicing is $1/\mu = 1{,}79$ minutes. From the theory of mass servicing [1] it is known that for MSS with unlimited flow of requests the queue will not grow to infinity only in the case when:

$$\psi = \frac{\lambda}{\mu} \leq s \tag{7}$$

where s is the number of servicers.

In the example: $\psi = \dfrac{0.25}{0.558} = 0.448 < s = 1$

The probability that there is no request for servicing in the MSS, i.e. the probability that all requests (workers) arrived were serviced and that there are no requests weighting, is defined as:

$$p_0 = 1 - \psi \tag{8}$$

$$p_0 = 1 - 0.448 = 0.552$$

The probability that there are k requests in the MSS may be calculated form a recursive formula [4]:

$$p_k = \psi p_{k-1}; \quad p_1 = \psi p_0; \quad p_2 = \psi p_1 \quad \text{etc.} \tag{9}$$

or: $p_k = \psi^k p_0 = \psi^k (1 - \psi)$

The probabilities p_k, that there are from 0 to 10 requests in any moment in the system, are given in the Table 1.

Tablica 1
Table 1

P0	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10
0,552	0,247	0,110	0,049	0,022	0,009	0,004	0,002	0,0009	0,0004	0,00018

Vjerojatnosti p_k, da postoji od 0 do 10 zahtjeva u bilo kojem trenutku u sustavu daju se u tablici 1.

Vjerojatnost da je broj zahtjeva k manji od n, daje se prema

$$P(k \leq n) = \sum_{k=0}^{n} p_k = 1 - \psi^{n+1} \quad (10)$$

Vjerojatnost da je broj zahtjeva u sustavu za masovno posluživanje k veći od n je

$$p(k > n) = \psi^{n+1} \quad (11)$$

U primjeru kada je tok neograničen, vjerojatnost da postoji više od jednog zahtjeva u sustavu za masovno posluživanje (koji su u tijeku, obradbe ili čekaju) je: $P(k>1) = 0{,}448^2 = 0{,}20$; za više od 2 zahtjeva: $P(k>2) = 0{,}09$, za više od 3 zahtjeva: $P(k>3) = 0{,}04$, a za više od 5 zahtjeva: $P(k>5) = 0{,}008$. Općenito, vjerojatnost da tijekom vremenskog razdoblja t prispije k zahtjeva (radnika) za pružanje usluge je prema [1]

$$P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \quad (12)$$

Proizlazi da se vjerojatnost za $k > \lambda t$ izuzetno brzo smanjuje, jer vrijednost nazivnika k raste brže od vrijednosti brojnika $(\lambda t)^k$.

Matematičko očekivanje za srednji broj zahtjeva koji čekaju je

$$E_1 = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{\psi^2}{1-\psi} \quad (13)$$

Za naš primjer to daje

$$E_1 = \frac{0.448^2}{1-0.448} = 0.363$$

Matematičko očekivanje glede broja zahtjeva (radnika) u sustavu za masovno posluživanje (koji su u tijeku obradbe ili čekaju):

$$E_2 = \frac{\lambda}{\mu-\lambda} = \frac{\psi}{1-\psi} \quad (14)$$

$$E_2 = \frac{0.448}{1-0.448} = 0.8$$

Matematičko očekivanje da je poslužitelj besposlen je

$$E_3 = p_0 = 1-\psi \quad (15)$$

$$E_3 = 1 - 0.448 = 0.552$$

Srednje vrijeme čekanja zahtjeva (radnika) na posluživanje je

$$\bar{t}_f = \frac{\psi}{\mu(1-\psi)} = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{E_2}{\mu} \quad (16)$$

U našem primjeru to je

$$\bar{t}_f = \frac{0.448}{0.558\,(1-0.448)} = 1.45 \text{ min}$$

Vjerojatnost čekanja zahtjeva (radnika) na posluživanje dulje od t je

$$P(>t) = \psi e^{-\mu t(1-\psi)} \quad (17)$$

The probability that the number of requests is k less than n, is given by:

$$P(k \leq n) = \sum_{k=0}^{n} p_k = 1 - \psi^{n+1} \quad (10)$$

The probability that number of requests in MSS is k greater then n is:

$$p(k > n) = \psi^{n+1} \quad (11)$$

In the example where the flow is unlimited, the probability that there are more than 1 requests in the MSS (being serviced and weighting) is: $P(k>1) = 0{,}448^2 = 0{,}20$; for more than 2 requests: $P(k>2) = 0{,}09$, more than 3: $P(k>3) = 0{,}04$; and more than 5: $P(k>5) = 0{,}008$. Generally, the probability that during the period of time t arrives k requests (workers) for servicing is, according to (1):

$$P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \quad (12)$$

It follows that the probability for $k > \lambda t$ decreases rapidly, because the denominator k! increase in value faster than the nominator $(\lambda t)^k$.

Mathematical expectation for the mean number of requests weighting is:

$$E_1 = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{\psi^2}{1-\psi} \quad (13)$$

For the example it gives:

$$E_1 = \frac{0.448^2}{1-0.448} = 0.363$$

Mathematical expectation of the number of requests (workers) in the MSS (being serviced and weighting):

$$E_2 = \frac{\lambda}{\mu-\lambda} = \frac{\psi}{1-\psi} \quad (14)$$

$$E_2 = \frac{0.448}{1-0.448} = 0.8$$

Mathematical expectation that the servicer is idle is:

$$E_3 = p_0 = 1-\psi \quad (15)$$

$$E_3 = 1 - 0.448 = 0.552$$

Mean time waiting for request for servicing is:

$$\bar{t}_f = \frac{\psi}{\mu(1-\psi)} = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{E_2}{\mu} \quad (16)$$

In the example it is:

$$\bar{t}_f = \frac{0.448}{0.558\,(1-0.448)} = 1.45 \text{ min.}$$

The probability of waiting for request (workers) for servicing longer than t is:

$$P(>t) = \psi e^{-\mu t(1-\psi)} \quad (17)$$

Za naš primjer vjerojatnost čekanja na zahtjeve daje se u tablici 2. Analiza podataka iz tablice pokazuje da postoji 24,19% zahtjeva koji čekaju na uslugu dulje od dvije minute i samo 9,6% onih koji čekaju dulje od pet minuta.

Tablica 2.
Table 2.

Vjerojatnost čekanja duže od: Probability of waiting longer than:		
dvije minute two minutes	tri minute three minutes	pet minuta five minutes
0.2419	0.1778	0.096

Iz analiziranog primjera može se zaključiti da je poslužitelj neiskorišten, budući da je besposlen, dok čeka na zahtjev za posluživanje 0,55 radnog vremena. Za radni dan to je 4,4 sata.

Ako se uzme u obzir neko povećanje kapaciteta remontne radionice postojeći bi sustav za masovno posluživanje bio neprimjeren. U sljedećem primjeru povećat će se parametar ulaznog toka trostruko tako da je novi $\lambda = 0{,}75$. Srednje vrijeme posluživanja i odgovarajući $\mu = 0{,}558$ ostaju nepromijenjeni. Prema teoriji masovnog posluživanja, sustav neograničenog toka gdje

$$\psi = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{0.75}{0.558} = 1.344$$

može biti racionalan samo s dvama poslužiteljima, jer za neograničen tok zahtjeva (radnika) i za više od jednog poslužitelja, red neće beskonačno narasti samo ako je $\lambda/\mu < 1$, tj. $\lambda/\mu s < 1$... Analiza sustava za masovno posluživanje remontne radionice s dvama i trima poslužiteljima prikazana je u sljedećem poglavlju.

4. ANALIZA SUSTAVA ZA MASOVNO POSLUŽIVANJE S DVAMA I TRIMA POSLUŽITELJIMA

Temeljni parametri sustava za masovno posluživanje u ovom su slučaju

$\lambda = 0{,}75$; $\mu = 0{,}558$; $\Psi = 1{,}344$; s = 2 i s = 3

Vjerojatnost da ima k zahtjeva u sustavu (koji su u obradbi ili čekaju) je

$$p_k = p_0 \frac{\psi^k}{k!} \quad \text{za} \quad 1 \le k < s \tag{18}$$

$$p_k = p_0 \frac{\psi^k}{s!\,s^{k-s}} \quad \text{za} \quad k \ge s \tag{19}$$

Vjerojatnost da nema zahtjeva daje se izrazom

Tablica 3.
Table 3.

Broj servisera Number of servicers s	P0	P1	P2	P3	P4	P5	...	P10
2	0,196	0,263	0,177	0,119	0,080	0,054	...	0,0074
3	0,251	0,237	0,226	0,101	0,045	0,020	...	0,0004

For the example the probability of waiting for requests are given in the Table 2. The analysis of the data from the table shows that there are 24,19% requests waiting to be serviced for longer than two minutes and only 9,6% longer than five minutes.

From the analysis example it may be concluded that the servicer is unutilized, because it is idle, weighting for request for servicing 0,55 of the work time. For work day it is 4,4 hours.

Taking into account that some increase of capacity of repair workshop, the existing MSS would be inadequate. In the next example the parameter of the input flow will be increased 3 times so that new $\lambda = 0{,}75$. Mean servicing time and corresponding $\mu = 0{,}558$ remain unchanged. According to TMS, the system with unlimited flow where:

$$\psi = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{0.75}{0.558} = 1.344,$$

may be rational only with two servicers, because for the unlimited flow of requests (workers) and for more than one servicers, the queue will not grow to infinity only if $\lambda/\mu<1$, i.e. $\lambda/\mu s<1$. The MSS analysis of the repair workshop with two and three servicer is demonstrated in the next chapter.

4. ANALYSIS OF THE MSS WITH TWO AND THREE SERVICERS

Basic parameters of the MSS in this case are:

$\lambda = 0{,}75$; $\mu = 0{,}558$; $\Psi = 1{,}344$; $s = 2$, $s = 3$.

The probability that there are k requests in the system (being serviced or waiting) is:

$$p_k = p_0 \frac{\psi^k}{k!} \quad \text{for} \quad 1 \le k < s \tag{18}$$

$$p_k = p_0 \frac{\psi^k}{s!\,s^{k-s}} \quad \text{for} \quad k \ge s \tag{19}$$

The probability that there are no requests is given by:

$$p_0 = \left[\sum_{k=0}^{s} \frac{\psi^k}{k!} + \frac{\psi^{s+1}}{s!\,(s-\psi)} \right]^{-1} \tag{20}$$

In the case of $s = 2$ the probability is:

$$p_0 = \left[1 + \frac{1.344}{1} + \frac{1.344^2}{2} + \frac{1.344^3}{2\,(2-1.344)} \right]^{-1} = 0.196,$$

and in the case of s=3 the probability is:

$$p_0 = 0.251$$

The values of the probability p_k that there are k requests in the MSS are given in Table 3.

$$p_0 = \left[\sum_{k=0}^{s} \frac{\psi^k}{k!} + \frac{\psi^{s+1}}{s!\,(s-\psi)} \right]^{-1} \tag{20}$$

U slučaju da je $s = 2$, vjerojatnost je

$$p_0 = \left[1 + \frac{1.344}{1} + \frac{1.344^2}{2} + \frac{1.344^3}{2\,(2-1.344)} \right]^{-1} = 0.196$$

a u slučaju da je $s = 3$ vjerojatnost je

$$p_0 = 0.251$$

Vrijednosti vjerojatnosti pk da ima k zahtjeva u sustavu za masovno posluživanje daju se u tablici 3.

Vjerojatnost da su u trenutku stizanja sljedećeg zahtjeva (radnika) svi poslužitelji zaposleni posluživanjem prethodno pristiglih zahtjeva (radnika) podvrgnut će se analizi.

Općenito gledano pri s poslužitelja vjerojatnost da novi zahtjev mora čekati jednaka je vjerojatnosti da postoji barem s zahtjeva u sustavu u tom trenutku. Vjerojatnost je prema izrazu

$$P(k \geq s) = \Pi = \sum_{k=s}^{\infty} p_k = \frac{s^s}{s!} \sum_{k=s}^{\infty} \left(\frac{\psi}{s}\right)^k p_0 = \frac{\psi^s p_0}{(s-1)!\,(s-\psi)} \tag{21}$$

Za $s = 2$, to je

$$\Pi = \frac{1.344^2 \cdot 0.196}{(2-1)!\,(2-1.344)} = 0.539$$

a za $s = 3$,

$$\Pi = 0{,}1838 .$$

Prema teoriji masovnog posluživanja funkcija distribucije vremena čekanja zahtjeva je

$$P(\gamma > t) = \Pi e^{-(s\mu - \lambda)\,t} \tag{22}$$

gdje je y vrijeme čekanja na posluživanje

Za s = 2, $\mu = 0{,}558$; $\lambda = 0{,}75$ i $y > 1$ vjerojatnost je

$$P(\gamma > 1) = 0.539 e^{-(2 \cdot 0.558 - 0.75)\,1} = 0.379$$

a za s = 3

$$P(\gamma > 1) = 0{,}0729$$

Na temelju (22) mogu se odrediti drugi kvantitativni podaci. Posebno je zanimljivo matematičko očekivanje vremena čekanja na početak posluživanja, tj. srednje vrijeme čekanja:

$$\bar{t}_f = \frac{\Pi}{\mu\,(s-\psi)} \tag{23}$$

Za $s = 2$

$$\bar{t}_f = \frac{0.539}{0.558\,(2-1.344)} = 1.472 \text{ min}$$

Odgovarajuće vrijednosti za naš primjer sa $s = 2$ i $s = 3$ dane su u tablici 4.

Konačno, može se izračunati srednje vrijeme koje zahtjevi (radnici) gube čekajući a koji su stigli u svrhu posluživanja tijekom vremena T.

Tijekom vremena T u prosjeku stigne λT zahtjeva (radnika) tako da je njihovo ukupno vrijeme čekanja

The probability that at the moment of the arrival of the next request (worker) all servicers are occupied by servicing previously arrived requests (workers) will be analyzed.

Generally with s servicers the probability that new request must wait is equal to the probability that there are at least s requests in the system at that moment. That probability is according to formula (19):

$$P(k \geq s) = \Pi = \sum_{k=s}^{\infty} p_k = \frac{s^s}{s!} \sum_{k=s}^{\infty} \left(\frac{\psi}{s}\right)^k p_0 = \frac{\psi^s p_0}{(s-1)!\,(s-\psi)} \tag{21}$$

For $s = 2$, it is:

$$\Pi = \frac{1.344^2 \cdot 0.196}{(2-1)!\,(2-1.344)} = 0.539 ,$$

and for $s = 3$,

$$\Pi = 0{,}1838 .$$

According to the TMS the function of the distribution of the waiting time of the request is:

$$P(\gamma > t) = \Pi e^{-(s\mu - \lambda)\,t} , \tag{22}$$

where γ is the time of waiting for servicing.

For $s = 2$, $\mu = 0{,}558$, $\lambda = 0{,}75$ and $\gamma > 1$, the probability is:

$$P(\gamma > 1) = 0.539 e^{-(2 \cdot 0.558 - 0.75)\,1} = 0.379 ,$$

and for $s = 3$,

$$P(\gamma > 1) = 0{,}0729$$

Based on (22) other quantitative data may be found. Of special interest is the mathematical expectation of the time of waiting for the beginning of servicing i.e. mean waiting time:

$$\bar{t}_f = \frac{\Pi}{\mu\,(s-\psi)} \tag{23}$$

For $s = 2$:

$$\bar{t}_f = \frac{0.539}{0.558\,(2-1.344)} = 1.472 \text{ min.}$$

Corresponding values for the example with $s = 2$ and $s = 3$ is given in Table 4.

Mean lost time of the request (worker) while waiting and which arrived for servicing during the time T, may be calculated. During the time T, on average λT requests (workers) arrive, so their total waiting time is:

$$\bar{T}_f = \lambda \bar{t}_f T = \frac{\Pi \Psi}{s - \psi} T \tag{24}$$

For $\psi = 1{,}344$, $s = 2$ and $T = 1$ day $= 480$ *min*, $\bar{T}_f = 529$ min .i.e. 8,83 hours.

Corresponding values of the total waiting time $\bar{T}_f$ in the case of $s = 2$ and $s = 3$ are given in the Table 4.

Mathematical expectation of the mean number of requests in a queue may be determined by:

$$E_1 = \frac{\psi}{s\left(1 - \frac{\psi}{s}\right)^2} P_s \tag{25}$$

Corresponding values of the mean number of requests (workers) in the queue for $s = 2$ and $s = 3$ are given in the Table 4.

$$\overline{T}_f = \lambda \overline{t}_f T = \frac{\Pi\Psi}{s-\psi} T \qquad (24)$$

Za $\Psi = 1{,}344$; $s = 2$ i $T = 1$ dan $= 480$ min, $\overline{T}_f = 529$ min tj. 8,83 sata.

Odgovarajuće vrijednosti ukupnog vremena čekanja $\overline{T}_f$ u slučaju kad je s = 2 i s = 3 daju se u tablici 4.

Matematičko očekivanje srednjeg broja zahtjeva u redu može se odrediti pomoću

$$E_1 = \frac{\psi}{s\left(1-\frac{\psi}{s}\right)^2} P_s \qquad (25)$$

Odgovarajuće vrijednosti srednjeg broja zahtjeva (radnika) u redu za $s = 2$ i $s = 3$ daju se u tablici 4.

Matematičko očekivanje za vrijeme koje poslužitelji provode besposleni (čekajući na zahtjev) je

$$E_3 = \sum_{k=0}^{s-1} \frac{s-k}{k!} \psi^k P_0 = \sum_{k=0}^{s-1} (s-k) P_s \qquad (26)$$

Za $s = 2$, $E_3 = 2p_0 + p_1 = 2 \cdot 0{,}196 + 0{,}263 = 0{,}655$ dana (5,24 sata).

Vrijeme besposlenosti jednog poslužitelja odredilo se kao E_3 / s.

Odgovarajuće vrijednosti za model sustava s dvama i trima poslužiteljima daju se u tablici 4.

Nakon analize modela sustava za masovno posluživanje s dvama i trima poslužiteljima uočava se iz tablice 4. da su poslužitelji premalo zaposleni. (To se moglo očekivati budući da $\Psi = \lambda/\mu = 1{,}344$, posebice za slučaj s tri poslužitelja). U prvom slučaju svaki je poslužitelj bio besposlen 32,7% (2,6 sati) radnog dana, čekajući na zahtjev. U slučaju triju poslužitelja polovicu su radnog dana proveli besposleni. Analiza također pokazuje da u slučaju dva poslužitelja zahtjev (radnici) čekaju u prosjeku 1,47 minute, dok ukupno izgubljeno vrijeme iznosi 530 minuta ili 8,83 sata. U slučaju triju poslužitelja zahtjev čeka samo 0,199 minuta i ukupno izgubljeno vrijeme iznosi samo 71,6 minuta ili 1,19 sati dnevno.

Nakon analize i određivanja važnih pokazatelja za rad sustava mora se donijeti odluka o izboru optimalnog sustava za masovno posluživanje. U svrhu donošenja odluke treba odrediti kriterije optimalnosti ili funkciju cilja. Ovdje se funkcija cilja određuje kao

$$F_c = \sum_{i=1}^{m} \overline{c_i f_i} + \sum_{j=1}^{s} \overline{c_j f_j} = \text{minimum} \qquad (27)$$

gdje su $\sum_{i=1}^{m} \overline{c_i f_i}$ troškovi koje uzrokuje čekanje na posluživanje

a $\sum_{j=1}^{s} \overline{c_j f_j}$ troškovi bruto plaće skladištara.

Pod pretpostavkom da jedan sat čekanja vrijedi 15 DEM a da su srednji troškovi bruto plaće skladištara 10 DEM po satu, funkcija cilja za pojedine slučajeve ima vrijednosti

$F_c(s = 2) = (8{,}83 \cdot 15) + (2 \cdot 8 \cdot 10) \approx 293$ DEM

$F_c(s = 3) = (1{,}19 \cdot 15) + (3 \cdot 8 \cdot 10) \approx 258$ DEM

Tablica 4.
Table 4.

Broj servisera Number of servicers s	$\overline{t}_f$	$\overline{T}_f$	E_1	E_3	E_3/s
2	1,472	530	1,106	0,655	0,327
3	0,199	71,6	0,148	1,65	0,55

Mathematical expectation for the idle time of the servicers (i.e. waiting for requests) is:

$$E_3 = \sum_{k=0}^{s-1} \frac{s-k}{k!} \psi^k P_0 = \sum_{k=0}^{s-1} (s-k) P_s \qquad (26)$$

For $s = 2$, $E_3 = 2p_0 + p_1 = 2 \cdot 0{,}196 + 0{,}263 = 0{,}655$ days (5,24 hours)

The idle time for one servicer is found as E_3 / s. The corresponding values for the model of the system with two or with three servicers is given in the Table 4.

After analyzing MSS model with 2 and with 3 servicers it is evident from Table 4., that the servicers are under loaded (it was expected since $\psi = \lambda/\mu = 1{,}344$, especially for case of 3 servicers). In the first case every servicer 32,7% (2,6 hours) of the work day is idle, waiting for request. In the case of three servicers half of the work day they are idle. The analysis shows also that in the case of 2 servicers the request (workers) waits on average 1,47 minutes, while the total time lost amounts 530 minutes or 8,83 hours. In the case of three servicers the requests waits only 0,199 minutes and the total lost time is only 71,6 min. or 1,19 hours per day.

Following the analysis and after establishing important indicators of the system, a decision has to be made about optimal choice of the MSS. For decision making it is necessary to establish optimality criteria or the objective function. Here the objective function is defined as:

$$F_c = \sum_{i=1}^{m} \overline{c_i f_i} + \sum_{j=1}^{s} \overline{c_j f_j} = \text{minimum} \qquad (27)$$

where $\sum_{i=1}^{m} \overline{c_i f_i}$ are expenses created by waiting for servicing,

while $\sum_{j=1}^{s} \overline{c_j f_j}$ are expenses created by the gross wages servicer.

Assuming that one hour waiting is valued at 15 DEM, and that mean expenses of the gross wages servicer are valued at about 10 DEM per hour, the objective function has the values for respective cases are:

$F_c(s = 2) = (8{,}83 \cdot 15) + (2 \cdot 8 \cdot 10) \approx 293$ DEM

$F_c(s = 3) = (1{,}19 \cdot 15) + (3 \cdot 8 \cdot 10) \approx 258$ DEM

Based on the previous calculation it is obvious that the best choice of the MSS for the store of repair workshop are three servicers, which results in the least total daily expenses, without calculation of the lost time of servicer.

5. CONCLUSION

The analytical method described in this work was formulated according to the model of the opened MSS with unlimited flow

Utemeljeno na prethodnom proračunu očito je da je najbolji izbor sustava za masovno posluživanje za skladište remontne radionice onaj s trima skladištarima, što uzrokuje najmanje ukupne dnevne troškove ne uzimajući u obzir neradno vrijeme skladištara.

5. ZAKLJUČAK

Analitički postupak koji se opisuje u ovom radu formuliran je prema modelu otvorenog sustava za masovno posluživanje neograničena toka za koji zahtjevi stižu sukladno Poissonovu zakonu distribucije i obrađuju se prema redoslijedu prispijeća. Iako pretpostavke koje su dane u ovom modelu sustava za masovno posluživanje sadrže neka ograničenja, model se može primijeniti u praksi za rješavanje nekih manje složenih slučajeva. Metoda omogućuje da se pronađe optimalno rješenje na jednostavan način. Za rješavanje složenijih slučajeva sustava za masovno posluživanje valja uporabiti postupke računalne simulacije utemeljene na odgovarajućim matematičkim modelima.

LITERATURA

[1] **B.V. GNEDENKO, I.N. KOVALENKO**: Introduction to the Theory of Mass Servicing. Nauka, Moskva, 1966. (in Russian).

[2] **I. PAVLIĆ**: Statistical theory and practice. Tehnička knjiga, Zagreb, 1971. (in Croatian).

[3] **I. MAVRIĆ**: Determining optimal number of cranes in the workshop by the analytical method. XVIII Works of the FSB, Zagreb, 1994. (in Croatian).

[4] **I. MAVRIĆ, I. GRUBIŠIĆ**: Analysis and optimization of the transport in workshop by an analytical method. IMAM-95, Dubrovnik, 1995.

[5] **L.L. LAPIN**: Probability and Statistics for Modern Engineering. PWS-Kent Publishing Company, Boston, 1990.

for which the requests arrive according to the Poisson's law of distribution and are serviced in the order of arrival. Although the assumptions, made in this model of MSS, contain some constraints, the model can be used in practical work for solving less intricate cases. The method makes it possible to find optimal solution in a simple way. For solving more intricate cases of MSS it is necessary to use computer simulation methods based on the appropriate mathematical model.

REFERENCES

[1] **B.V. GNEDENKO, I.N. KOVALENKO**: Introduction to the Theory of Mass Servicing. Nauka, Moskva, 1966. (in Russian).

[2] **I. PAVLIĆ**: Statistical theory and practice. Tehnička knjiga, Zagreb, 1971. (in Croatian).

[3] **I. MAVRIĆ**: Determining optimal number of cranes in the workshop by the analytical method. XVIII Works of the FSB, Zagreb, 1994. (in Croatian).

[4] **I. MAVRIĆ, I. GRUBIŠIĆ**: Analysis and optimization of the transport in workshop by an analytical method. IMAM-95, Dubrovnik, 1995.

[5] **L.L. LAPIN**: Probability and Statistics for Modern Engineering. PWS-Kent Publishing Company, Boston, 1990.