TOMISLAV ŠIKIĆ
Dr. MARIJANA GJUMBIR
Fakultet prometnih znanosti
Zagreb, Vukelićeva 4

Znanost u prometu
Prethodno priopćenje
UDK: 519.6 : 627.131 : 351.811
Primljeno: 03.06.1992.
Prihvaćeno: 30.11.1992

PRIMJENA NUMERIČKE METODE RJEŠAVANJA NELINEARNIH JEDNADŽBI ZA PRORAČUN PARAMETARA POTREBNIH PRI ODREĐIVANJU PROSJEČNE BRZINE VOZILA NA DVOSMJERNIM PUTOVIMA

SAŽETAK

U ovom radu preporuča se primjena numeričkog algoritma "Pegasus" za određivanje parametara neophodnih pri izračunavanju prosječne brzine vozila koje se kreće dvosmjernom cestom.

Tablice sastavljene s pomoću te metode omogućuju zamjenu netočnih dijagrama koji su dosad bili primjenjivani.

1. UVOD

U današnjem vremenu računala ostvarena je mogućnost primjene numeričkih metoda u praksi bez dugotrajnog računanja. U ovom će članku biti predočena vrlo jednostavna numerička metoda koja potpuno zamjenjuje primjenu nepreciznih grafikona u jednom dugo proučavanom prometnom problemu.

Taj prometni problem jest određivanje prosječne brzine vozila koje se kreće dvosmjernom prometnicom. Zbog nemogućnosti trenutnog pretjecanja kolone koja se kreće manjom brzinom, promatrano vozilo morat će usporivati vožnju te će se time vrijeme potrebno za prolaženje određenog puta povećati.

Još 1961. godine Tanner je, primjenom teorije masovnog usluživanja, u svom radu [1] izveo izraz za prosječnu brzinu $\overline{u}$ u ovisnosti o prosječnom vremenu $\overline{w}$ koje vozilo provede u "čekanju" na pretjecanje sporijih sudionika u prometu. Izraz za prosječno vrijeme čekanja, pak, sadrži parametre K i N – rješenja dviju nelinearnih transcendentnih jednadžbi.

Na žalost i na iznenađenje autora ovog članka, za rješavanje spomenutih jednadžbi u literaturi se još danas predlaže korištenje grafikona. Tako se, primjerice, i u knjizi [2] koriste grafikoni koji ne omogućuju točno određivanje niti prve decimale. Dapače, u nekim slučajevima iz tih dijagrama se uopće ne mogu očitati parametri K i N.

Stoga se u ovom radu predlaže numerički algoritam "Pegasus" koji uz jednostavnu primjenu računala, do na željenu točnost, omogućuje određivanje vrijednosti parametara K i N.

2. TEORETSKE OSNOVICE

Kao što je u uvodu napomenuto, Tanner je izrazio prosječnu brzinu $\overline{u}$ kojom se na duljem putovanju po dvosmjernoj cesti kreće vozilo koje nastoji prijeći određeni put konstantnom brzinom u. U njegovu članku prosječna brzina $\overline{u}$ dana je sljedećim izrazom:

$$\overline{u} = \frac{u\,v^2 + q(u-v)\,(v-b\,q)\,v\,\overline{w}}{v^2 + q\,(u-v)\,(v-b\,q)\,\overline{w}} \tag{1}$$

Iz (1) očevidno je da je $\overline{u}$ dana kao funkcija $\overline{w}$, gdje je w prosječno vrijeme čekanja na pretjecanje izraženo s

$$\overline{w} = \frac{1}{(v+V)\,(1-R)}\left[\frac{K\,e^{-cd}}{c+G-GK}\left(1-\frac{c\,e^{G(v+V)t}}{c+G}\right) + e^{tG(v+V)+Gd}\left(\frac{N}{G}-\frac{c}{G\,(c+G)}\right)-\frac{1-R}{c\,(1-r)}\right] \tag{2}$$

U jednakostima (1) i (2) svi parametri, osim K i N, poznati su prometni pojmovi ili se pak mogu elementarnim računskim operacijama odrediti s pomoću njih. Tako su redom:

v, V – brzina vozila koja se kreću u koloni
b, B – minimalni razmak između vozila u koloni
q, Q – protok vozila
g, G – prometna gustoća
r, R – intenzitet prometa
d – razmak od promatranog do najbližeg vozila iz suprotnog smjera
t – vrijeme pretjecanja

$$c = \frac{q\,(u-v)}{v\,(u+V)}$$

gdje su malim slovima označene veličine koje se odnose na prometni trak u kojemu se nalazi promatrano vozilo, a velikim slovima iste te veličine koje se odnose na trak u suprotnom smjeru.

Nasuprot tomu, da bi se dobile vrijednosti parametara K i N moraju se riješiti nelinearne transcendentne jednadžbe. Parametar K rješenje je jednadžbe

$$K = e^{R(K-1-\frac{c}{G})} \tag{3}$$

koje se nalazi unutar intervala [0, 1].

Za parametar N mora se uzeti manje pozitivno rješenje jednadžbe

$$N = e^{r(N-1+\frac{G}{c})} \tag{4}$$

Prvo pitanje kod nelinearnih jednadžbi jest – da li uopće imaju rješenja. Na to pitanje je odgovoreno u ovom poglavlju. U narednom poglavlju će biti odgovor na drugo pitanje – kako odrediti rješenja ako ih jednadžbe (3) i (4) imaju.

Vratimo se prvom pitanju. Kako je funkcija na desnoj strani jednadžbe (3) oblika

$$f(x) = e^{\alpha(x+\beta)} \tag{5}$$

gdje je $\beta = -1 - \frac{c}{G}$

za $\frac{c}{G} > 0$ parametar β će biti manji od –1, te će stoga spomenuta jednadžba imati dva rješenja. Također je jasno kako će oba rješenja biti pozitivna, a jedno od njih će biti manje od jedan. Budući da su c i G pozitivne veličine, slijedi da će jednadžba (3) uvijek imati rješenje u intervalu [0, 1] (sl. 1).

Kako je funkcija na desnoj strani jednadžbe (4) također oblika (5), a parametar $\beta = -1 + \frac{G}{c}$, ne može se zaključiti da je $\beta > -1$, odnosno ne može se zaključiti da će za $\frac{G}{c} > 0$ jendadžba (4) uvijek imati rješenja (sl. 2).

No kako je jednadžba (4) oblika

$$x = f(x) \tag{6}$$

uvjet za postojanje rješenja je sljedeći:

Ako postoji interval I = [a,b] takav da za svaki $z \in I$ vrijedi

$$r\, e^{r(z-1+\frac{G}{c})} < 1 \tag{7}$$

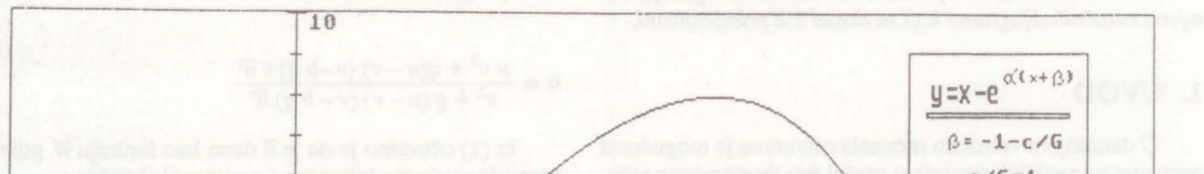
tada se barem jedno rješenje jednadžbe (4) nalazi unutar intervala I. Ali, s druge strane, jednadžba (4) oblika je (6), pa je jasno da je njeno manje rješenje unutar intervala $\left[0, \frac{1}{r}\right]$. Koristeći se tom činjenicom, može se uvjet (7) interpretirati na ovaj način:

Jednadžba (4) imat će rješenje ako je zadovoljen uvjet

$$r\, e^{(1-r+r\frac{G}{c})} < 1 \tag{7'}$$

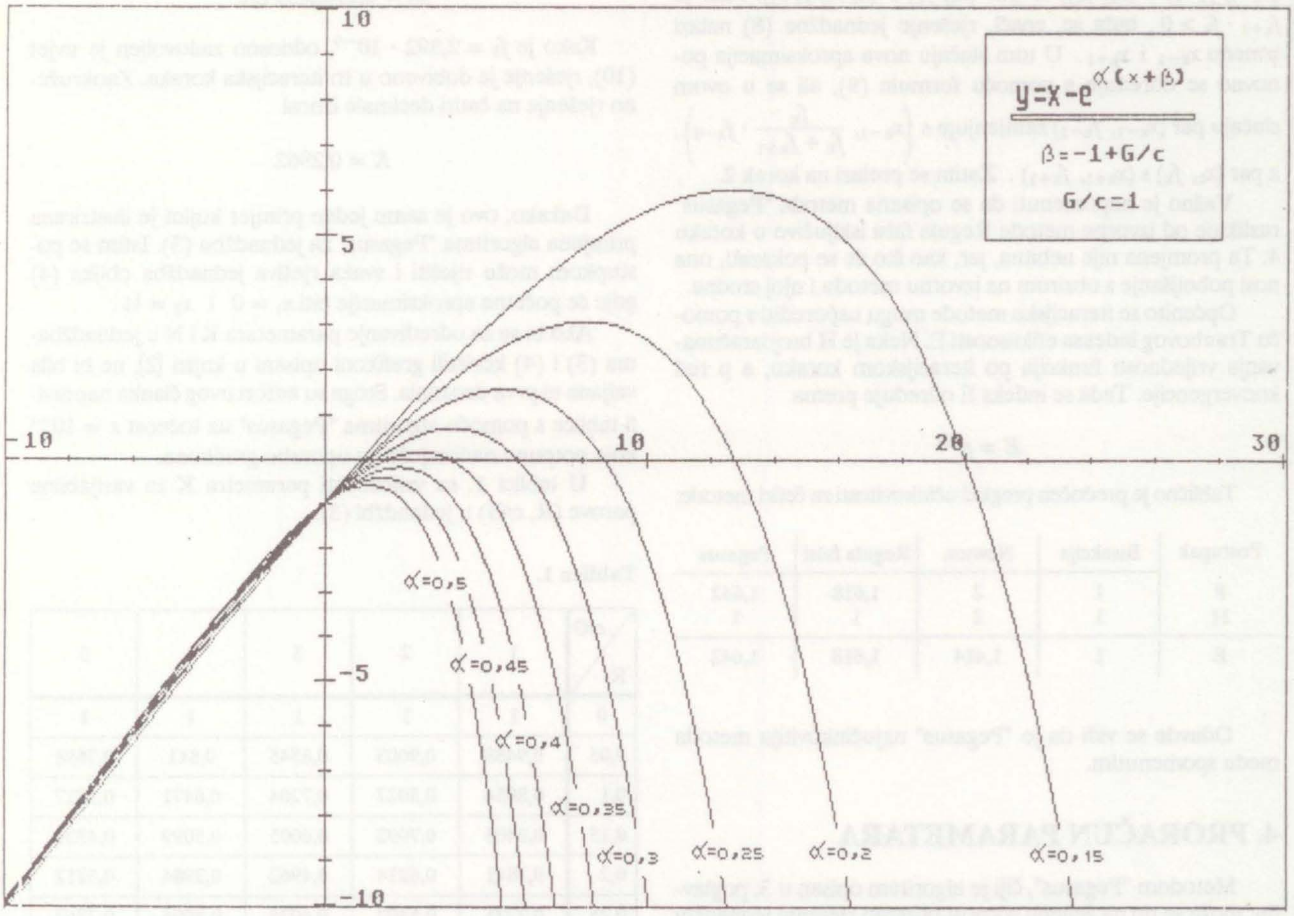
Dakako, tada će rješenje ležati unutar intervala $\left[0, \frac{1}{r}\right]$.

Razmatranjem u ovom poglavlju ujedno su opisani intervali izoliranosti rješenja jednadžbi (3) i (4). Za jednadžbu (3)



Slika 1.

Promet, vol. 4, 1992, br. 5, 163-167



Slika 2.

to je interval [0,1], a za jednadžbu (4) interval $\left[0, \frac{1}{r}\right]$. Ostaje još pitanje odabira prikladne metode za određivanje parametara K i N. Upravo zato što su za jednadžbe (3) i (4) unaprijed poznati intervali izolacije, prednost se može dati metodama koje pretpostavljaju njihovo poznavanje. Takve su primjerice metoda bisekcije, metoda Regula falsi, te njene varijante [3, 4, 5]. Autori ovog članka, stoga, predlažu jednu modifikaciju metode Regula falsi, tzv. metodu "Pegasus".

3. ALGORITAM "PEGASUS"

Jednadžbu

$$f(x) = 0 \tag{8}$$

gdje je $f : [a, b] \rightarrow R$ realna nelinearna funkcija, može se riješiti metodom "Pegasus" ako je funkcija f neprekidna na intervalu [a, b] i vrijedi $f(a) \cdot f(b) < 0$. Taj uvjet osigurava postojanje barem jednog rješenja jednadžbe (8) unutar intervala [a, b]. Iz prethodnog je poglavlja jasno da je za jednadžbu (3) taj uvjet uvijek zadovoljen na intervalu [0, 1]. Za jednadžbu (4) taj uvjet je zadovoljen na intervalu $\left[0, \frac{1}{r}\right]$ kada vrijedi (7').

Glavni koraci algoritma "Pegasus" su:

1. Unutar intervala [a, b] odaberu se dvije početne aproksimacije rješenja x_{k-1} i x_k tako da bude $f_{k-1} \cdot f_k < 0$. Pritom je f_k oznaka za $f(x_k)$.

2. Sljedeća aproksimacija izračuna se prema formuli

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_{k-1}}{f_k - f_{k-1}} \cdot f_k \tag{9}$$

To je tzv. "sekantni korak".

3. Odrediti f_{k+1} i provjeriti uvjet okončanja postupka, tj. provjeriti da li vrijedi

$$|f_{k+1}| < \varepsilon \tag{10}$$

gdje je ε željena točnost.

Uvjet (10) može se zamijeniti i uvjetom

$$|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon \tag{10'}$$

Ako je uvjet zadovoljen, tada je x_{k+1} rješenje, odnosno korijen jednadžbe (8). Ako uvjet nije zadovoljen, prelazi se na korak (4).

4. U ovom koraku formira se novi interval unutar kojeg će biti traženo rješenje jednadžbe (8). Izračuna se $f_{k+1} \cdot f_k$, pa ako je $f_{k+1} \cdot f_k < 0$, rješenje se nalazi između x_k i x_{k+1}. Tada se za taj par aproksimacija odredi naredna aproksimacija x_{k+2} prema izrazu (9). U formuli (9) treba zamijeniti par

(x_{k-1}, f_{k-1}) s (x_k, f_k), te par (x_k, f_k) s (x_{k+1}, f_{k+1}). Ako je $f_{k+1} \cdot f_k > 0$, tada se, znači, rješenje jednadžbe (8) nalazi između x_{k-1} i x_{k+1}. U tom slučaju nova aproksimacija ponovno se određuje s pomoću formule (9), ali se u ovom slučaju par (x_{k-1}, f_{k-1}) zamjenjuje s $\left(x_{k-1}, \frac{f_k}{f_k + f_{k+1}} \cdot f_{k-1}\right)$, a par (x_k, f_k) s (x_{k+1}, f_{k+1}). Zatim se prelazi na korak 2.

Važno je napomenuti da se opisana metoda "Pegasus" razlikuje od izvorne metode Regula falsi isključivo u koraku 4. Ta promjena nije nebitna, jer, kao što će se pokazati, ona nosi poboljšanje s obzirom na izvornu metodu i njoj srodne.

Općenito se iteracijske metode mogu usporediti s pomoću Traubovog indeksa efikasnosti E. Neka je H broj izračunavanja vrijednosti funkcija po iteracijskom koraku, a p red konvergencije. Tada se indeks E određuje prema

$$E = p^{1/H}$$

Tablično je predočen pregled učinkovitosti za četiri metode:

Postupak	Bisekcija	Newton	Regula falsi	Pegasus
P	1	2	1,618	1,642
H	1	2	1	1
E	1	1,414	1,618	1,642

Odavde se vidi da je "Pegasus" najučinkovitija metoda među spomenutim.

4. PRORAČUN PARAMETARA

Metodom "Pegasus", čiji je algoritam opisan u 3. poglavlju, može se do na željenu točnost odrediti rješenja jednadžbi (3) i (4). Dakako, rješenje jednadžbe (4) može se odrediti samo ako postoji.

Rješavanjem jednoga konkretnog primjera bit će vidljivo koliko ja algoritam "Pegasus" jednostavan, "brz" i točan.

Ako je npr. R = 0,45 i c/G = 2, jednadžba (3) poprima oblik (8)

$$x - e^{0,45\,(x-3)} = 0$$

u kojemu je K = x. Neka je tražena točnost $\varepsilon = 10^{-6}$.

Interval [0, 1] jest interval izolacije rješenja, te su kao početne aproksimacije odabrane

$$x_1 = 0 \quad \text{i} \quad x_2 = 1$$

Iz (9) se postiže

$$x_3 = x_2 - \frac{x_2 - x_1}{f_2 - f_1} \cdot f_2 = 0{,}3040333047$$

Budući da je $f_3 = 6{,}784276544 \cdot 10^{-3}$, to je $f_3\, f_2 > 0$, pa se u formuli (9) zamjenjuje (x_2, f_2) s (x_3, f_3), a (x_1, f_1) s $\left(x_1, \frac{f_2}{f_2 + f_3} \cdot f_1\right)$ i dobiva se

$$x_4 = 0{,}2961933559$$

Nadalje je $f_4 = -8{,}832232 \cdot 10^{-6}$, pa je sada $f_4\, f_3 < 0$. Zamjenjujući $\left(x_1, \frac{f_2}{f_2 + f_3} \cdot f_1\right)$ s (x_3, f_3) i (x_3, f_3) s (x_4, f_4) iz (9) dobiva se

$$x_5 = 0{,}2962035492$$

Kako je $f_5 = 2{,}392 \cdot 10^{-9}$, odnosno zadovoljen je uvjet (10), rješenje je dobiveno u tri iteracijska koraka. Zaokruženo rješenje na četiri decimale iznosi

$$K = 0{,}2962$$

Dakako, ovo je samo jedan primjer kojim je ilustrirana primjena algoritma "Pegasus" za jednadžbu (3). Istim se postupkom može riješiti i svaka rješiva jednadžba oblika (4) gdje će početne aproksimacije biti $x_1 = 0$ i $x_2 = 1/r$.

Ako bi se za određivanje parametara K i N u jednadžbama (3) i (4) koristili grafikoni opisani u knjizi [2], ne bi bila valjana ni prva decimala. Stoga su autori ovog članka napravili tablice s pomoću algoritma "Pegasus" uz točnost $\varepsilon = 10^{-4}$ koje potpuno nadomješćuju uporabu grafikona.

U tablici 1. su vrijednosti parametra K za varijabilne parove (R, c/G) u jednadžbi (3).

Tablica 1.

R \ c/G	1	2	3	4	5
0	1	1	1	1	1
0,05	0,9488	0,9003	0,8545	0,811	0,7698
0,1	0,8954	0,8027	0,7204	0,6471	0,5817
0,15	0,8403	0,7092	0,6005	0,5099	0,4339
0,2	0,7841	0,6214	0,4962	0,3984	0,3212
0,25	0,7275	0,5407	0,4073	0,3096	0,2367
0,3	0,6712	0,4678	0,3328	0,2398	0,1742
0,35	0,6161	0,4029	0,2711	0,1854	0,1281
0,4	0,5628	0,3459	0,2205	0,1433	0,0942
0,45	0,5119	0,2962	0,1792	0,1108	0,0693
0,5	0,4639	0,2533	0,1456	0,0857	0,0511

Tablica 2. će omogućiti određivanje parametra N uz promjenljive r i G/c za jednadžbu oblika (4).

Važno je napomenuti da osim točnosti $\varepsilon = 10^{-4}$ za sva rješenja, tablice 1. i 2. imaju i finiju podjelu varijabilnih parametara R, c/G, r i G/c što omogućuje i veću prilagodljivost praktičnoj primjeni. Iz tablice 2. vidljivo je da za neke parove (r, G/c) ne postoji rješenje jednadžbe (4). No i u tom slučaju tablica 2. daje poboljšanje s obzirom na grafikon iz knjige [2]. Tako npr. za par

$$(r, G/c) = (0{,}4\,;\,0{,}4)$$

po dijagramu zaključak bi bio da jednadžba (4) nema rješenja, a za navedeni par rješenje je

$$N = 1{,}3497$$

Dakako, koliko god tablice bile dotjerane, one ne mogu obuhvatiti sve slučajeve. Stoga za one jednadžbe oblika (3) i (4) koje nisu sadržane u tablicama 1. i 2. preostaje izravna primjena algoritma "Pegasus".

Tablica 2.

r \ G/c	0,3	0,4	0,7	1	1,5	2	3	5	10	40	50
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0,05	1,0159	1,0213	1,0376	1,0541	1,0823	1,1113	1,1719	1,3037	1,7081	14,545	—
0,1	1,0340	1,0456	1,0813	1,1183	1,1833	1,2527	1,4058	1,7830	3,4852	—	
0,15	1,0546	1,0736	1,1331	1,1966	1,3124	1,4425	1,7569	2,7542	—		
0,2	1,0787	1,1066	1,1963	1,2959	1,4884	1,7244	2,4211	—			
0,25	1,1071	1,1464	1,2765	1,4296	1,7590	2,2581	—				
0,3	1,1417	1,1957	1,3845	1,6313	2,3547	—					
0,35	1,1850	1,2597	1,5474	2,0475	—						
0,4	1,2422	1,3497	1,8856	—							
0,45	1,3245	1,4979	—								
0,5	1,4685	—									

5. ZAKLJUČAK

Često se u praksi problemi svode na nelinearne jednadžbe, rješenja kojih treba potražiti nekim numeričkim postupkom. Odabir prikladne metode olakšava poznavanje značajki promatrane jednadžbe, odnosno s njom povezanoga problema. Tako je pri razmatranim jednadžbama bilo odlučujuće unaprijed poznavanje intervala u kojemu se nalaze rješenja. Za parametre K i N, potrebne pri proračunu prosječne brzine vozila koje se kreće dvosmjernim kolnikom, intervali izoliranosti upravo su bili unaprijed poznati. Zato se i mogla predložiti metoda "Pegasus" koja je posebno pogodna za "praktičare", jer ima osiguranu konvergenciju (ne treba ispitivati uvjete konvergencije), a željeno rješenje postiže se u malom broju iterativnih koraka. Algoritam "Pegasus" ujedno zahtijeva samo računanje s vrijednostima funkcije, koja određuje jednadžbu, a ne i njenih derivacija. Time je omogućena i njegova vrlo jednostavna primjena, čak i na džepnim programirajućim računalima.

U članku je, također, skrenuta pozornost čitatelju da je, u sklopu ovog problema, u današnje vrijeme moćnih računala, korištenje grafikona te izbjegavanje primjene numeričkih metoda u praksi potpuno neutemeljeno.

SUMMARY

NONLINEAR EQUATION NUMERICAL METHOD RESOLVING APPLICATION FOR COMPUTATION OF PARAMETERS NEEDED IN ESTABLISHING AVERAGE VEHICLE SPEEDS ON TWO-WAY ROADS

This paper gives recommendations for the application of Pegasus numerical algorithm for establishing the parameters needed for the computation of average vehicle speeds on two–way roads.

The tables made by worked out by means of this method enable the substitution of incorrect diagrams that have been used up to this point of time.

LITERATURA

[1] J. C. TANNER: Delays on a Two–lane Road. Journal of Royal Statistical Society. Ser. B, 23, 1961, 1, str. 38–63.

[2] LJ. KUZOVIĆ: Teorija saobraćajnog toka. Beograd, Građevinska knjiga, 1987, str. 159–175.

[3] M. DOWELL, P. JARRATT: The "Pegasus" Method for Computing the Root of an Equation. B I T, 12, 1972, str. 503–508.

[4] M. GJUMBIR, Ž. OLUJIĆ: Nonlinear Equation, Solutions. In Encyclopedia of Chemical Processing and Design. (Ed. J.J. Mc Ketta), Vol. 31, New York, Marcel Dekker, 1990, str. 318–331.

[5] G. ENGELN–MUELLGES, F. REUTTER: Numerische Mathematik fuer ingenieure. Mannheim, Bibliographisches Institut, 1985.