

Dr. **MARIJANA GJUMBIR**
 Fakultet prometnih znanosti
 Zagreb, Vukelićeva 4

Znanost u prometu
 Prethodno priopćenje

UDK: 656:164

Primljeno: 23.01.1990.

Prihvaćeno: 24.09.1990.

PREDVIĐANJE RAZVOJA PROMETA LOGISTIČKIM TRENDOM

SAŽETAK

Za predviđanje dinamike razvoja prometa do i poslije 1992.g. može se primijeniti logistički trend, ako promatrano prometno obilježje ispoljava tipične faze u razvoju - fazu uhodavanja, izrazite ekspanzije i stagnantnog razvoja. U radu su izloženi kriteriji za izbor ovog trenda i jednostavniji postupci procjene parametara u njemu.

1. UVOD

Jedna karika u lancu za predviđanje vjerojatnog budućeg razvoja neke pojave, pa tako i prometa, jest uočavanje trenda razvoja. Da bi se moglo ustanoviti određene promjene količine prometa i njihovu dinamiku, treba raspolagati pouzdanim podacima iz proteklog vremenskog razdoblja o kvantiteti neke vrste prometa (ukupnog, prosječnog po stanovniku ili vozilu i sl.). Ako se statističkom analizom dosadašnjeg razvoja mogu tada uočiti određene tendencije razvoja, na temelju matematičkih kriterija naslutiti i trend, moguće je naći i njegov analitički izraz. Polučeni model može se koristiti i za prognozu budućeg razvoja pa tako i dinamike razvoja prometa do i nakon 1992. godine. Potrebno je istaknuti kako je to samo procjena, jer na ukupni razvoj neke pojave u budućnosti utječe niz faktora, a da prognoza dobivena na bazi trenda može poslužiti kao dobra orijentacija.

Čest je slučaj u prometu da se pojave mijenjaju s vremenom i teže nekoj granici zasićenja, te se zato za njihovo opisivanje koriste asimptotski trendovi, npr. modificirani eksponencijalni, Gompertzov i logistički trend^[1]. Svojstvo je spomenutih trend-modela da su troparametarski. Ocjenu njihovih parametara metodom najmanjih kvadrata nastoji se zaobići, jer se pri tom dobivaju sistemi normalnih jednažbi koje su nelinearne u parametrima, pa je i uz primjenu računala njihovo rješavanje otežano.

Logistički trend se najčešće javlja u obliku

$$y = \frac{k}{1 + b e^{at}}, \quad (1)$$

pri tom su a , b i k parametri, t je oznaka za vrijeme, a y promatrana pojava.

Ovaj se trend koristi za opisivanje pojava koje ispoljavaju tipične faze u razvoju - fazu uhodavanja, izrazite ekspanzije i period stag-

nantnog razvoja. U prometu se primjenjuje kod:

- proučavanja putovanja po jednom stanovniku
- planiranju dugoročnih potreba za glavnim telefonskim priključcima
- proučavanja ukupnog prometa putnika i robe na nekom aerodromu, luci i sl.
- predviđanja gustoće telefonskih aparata
- tendencije rasta poštanskih usluga šalterske službe i sl.

2. IZBOR TRENTA

Promatraju li se prve diferencije recipročnih vrijednosti logističke funkcije (1), može se uočiti da su omjeri tih diferencija konstantni. Tako je npr.

$$\frac{1}{y_{t+2}} - \frac{1}{y_{t+1}} = \frac{b}{k} e^{a(t+1)} (e^a - 1).$$

a omjer

$$\frac{\frac{1}{y_{t+2}} - \frac{1}{y_{t+1}}}{\frac{1}{y_{t+1}} - \frac{1}{y_t}} = e^a = \text{konst.}$$

Logistički trend će se dakle upotrijebiti kao model u slučaju kada su omjeri prvih diferencija recipročnih vrijednosti frekvencija vremenskog niza približno konstantni. To je tzv. kriterij diferencijal^[2].

Identifikaciju logističkog trenda može se provesti i ovako: za logističku je funkciju prva derivacija jednaka

$$y'_t = -y^2 \frac{ab e}{k}$$

Iz aproksimacije

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} \approx y'_t,$$

te svojstva da je $\Delta t = 1$ dobiva se nadalje

$$|\Delta y| \approx \frac{y^2 ab e^{at}}{k}$$

odnosno

$$\ln \frac{|\Delta y|}{y^2} \approx \ln \frac{ab}{k} + at$$

Ova relacija ukazuje da se $\ln \frac{|\Delta y|}{y^2}$ linearno

mijenja s vremenom t . Ako je procjena k^* parametra k poznata, tada je veličina $\ln\left(\frac{k^*}{y} - 1\right)$

linearna funkcija vremena, pa je

$$\Delta \left| \ln \left(\frac{k^*}{y} - 1 \right) \right| \approx \text{konst.}$$

i može biti također kriterij za izbor logističkog trenda. Na ovom se svojstvu osniva i grafički postupak za predviđanje dugoročnih potreba za glavnim telefonskim priključcima^{3]}.

3. JEDNOSTAVNI POSTUPCI ZA PROCJENE PARAMETARA

Nacrta li se graf logističke funkcije (1), na njemu je uočljivo da parametar k ima značenje horizontalne asimptote.

U primjenama je često moguće imati neku informaciju o vrijednosti asimptote k . Ako ne, može se grubu procjenu k^* vrijednosti k izračunati. Odaberu se tri vrijednosti t_1, t_2, t_3 koje čine aritmetički niz, tj.

$$t_2 = \frac{t_1 + t_3}{2} \quad (2)$$

ili

$$t_2 - t_1 = t_3 - t_2.$$

Tada je prema (1)

$$y_1 = \frac{k}{1 + b e^{at_1}},$$

$$y_2 = \frac{k}{1 + b e^{at_2}},$$

$$y_3 = \frac{k}{1 + b e^{at_3}},$$

a radi (2) vrijedi

$$\frac{k}{y_2} = 1 + b e^{at_2}$$

ili

$$\frac{k}{y_2} - 1 = \sqrt{\frac{k}{y_1} - 1} \cdot \sqrt{\frac{k}{y_3} - 1}.$$

Nakon sređivanja se dobiva

$$k^* = \frac{y_2(2y_1 y_3 - y_1 y_2 - y_2 y_3)}{y_1 y_3 - y_2^2} \quad (3)$$

Zamijeni li se k sa k^* , iz (1) slijedi sada

$$\frac{k^*}{y} - 1 = b e^{at}$$

te nakon logaritmiranja

$$\ln \left(\frac{k^*}{y} - 1 \right) = \ln b + a t.$$

To je linearna funkcija od t . Zamjenom

$$Y = \ln \left(\frac{k^*}{y} - 1 \right),$$

$$K = a,$$

$$L = \ln b,$$

dobiva se

$$Y = K t + L,$$

pa se za ocjenu parametara K i L može primijeniti linearnu metodu najmanjih kvadrata i poznate formule.

Povratnom zamjenom

$$a = K$$

$$b = e^L$$

dobivaju se zatim i procjene parametara a i b .

Nelinearnu metodu najmanjih kvadrata može se izbjeći i primjenom metode parcijalnih suma (ili metoda srednjih vrijednosti), koja se osniva na pretpostavci da je zbroj pogrešaka kod velikog broja podataka nula, a ta se pretpostavka usvaja i za pojedine grupe podataka. Zadani podaci se dijele na onoliko grupa koliko parametara treba procijeniti. U slučaju logističkog trenda, dijele se u 3 grupe.

Može se pokazati^{2]} da se procjene izračunavaju prema formulama

$$a = \frac{1}{m} \ln \frac{D_2}{D_1},$$

$$k = \frac{m \cdot S_1 - \frac{D_1^2}{D_1 - D_2}}{D_1 - D_2},$$

$$b = \frac{k}{z} \cdot \frac{D_1^2}{D_1 - D_2}.$$

Pri tom je $m = n/3$, a n je broj podataka.

$$S_1 = \sum_1^m \frac{1}{y_t}, \quad S_2 = \sum_{m+1}^{2m} \frac{1}{y_t}, \quad S_3 = \sum_{2m+1}^n \frac{1}{y_t}$$

$$D_1 = S_1 - S_2, \quad D_2 = S_2 - S_3,$$

$$z = \frac{1 - \frac{D_2}{D_1}}{1 - \sqrt{\frac{D_2}{D_1}}} \cdot \sqrt{\frac{D_2}{D_1}}$$

4. PREDVIĐANJE RAZVOJA

Podaci o jednom prometnom obilježju na području Jugoslavije za vremensko razdoblje 1970-1984.g. predstavljeni su u tablici:

Godina	t	y
1970.	1	384
1971.	2	476
1972.	3	555
1973.	4	724
1974.	5	966
1975.	6	1054
1976.	7	1320
1977.	8	1391
1978.	9	1433
1979.	10	1522
1980.	11	1711
1981.	12	1746
1982.	13	1757
1983.	14	1776
1984.	15	1811

Utvrđeno je za ove podatke da je veličina

$$\ln \frac{\Delta y}{y_{t+1}}$$

linearna funkcija vremena, te se pretpostavilo da je moguće veličinu y aproksimirati logističkom funkcijom (1). Procjene parametara određene su prethodno izloženim metodama.

Proračuni su izvedeni s pomoću programa sastavljenih u programskom jeziku GFA BASIC za računalo ATARI 1040 ST F. U taj su program ugrađeni potprogrami za kriterije izbora logističkog trenda, te za razne postupke procjena parametara u njemu.

Odabrane su vrijednosti $t_1 = 1$, $t_2 = 8$ i $t_3 = 15$, te prema (3) izračunata vrijednost $k^* = 1865.6510$, a zatim i procjena za a i b . Rezultat je logistički trend oblika

$$y = \frac{1865.6510}{1 + 5.9530 e^{-0.3529t}}$$

$$y = \frac{1899.5019}{1 + 5.9240 e^{-0.3402t}}$$

Ako se pretpostavi da bi se ova pojava razvijala i u budućem razdoblju prema logističkom trendu, tada bi se moglo izvršiti predviđanje npr. za 1985. godinu.

Budući da se raspolagalo i sa stvarnim podatkom, izvedena je usporedba s podacima izračunatim prema prvom modelu. Ovi su podaci prikazani tablicom, u kojoj je u posljednjem

retku upisana i "prognoza", dobivena za $t = 16$.

Godina	y	y _{izračunati}
1970.	384	360
1971.	476	474
1972.	555	609
1973.	724	761
1974.	966	924
1975.	1054	1087
1976.	1320	1241
1977.	1391	1378
1978.	1433	1494
1979.	1522	1588
1980.	1711	1662
1981.	1746	1718
1982.	1757	1759
1983.	1776	1789
1984.	1811	1811
1985.	1833	1827

5. ZAKLJUČAK

Asimptotski trendovi, posebno ovdje izložen logistički trend, također su značajna pomoć kod predviđanja budućeg razvoja prometa. Jednostavni kriteriji i postupci za ocjene parametara u njima omogućuju i njihovu širu primjenu.

Ukoliko dobivene numeričke vrijednosti svojom točnošću ne zadovoljavaju, mogu tada biti dobre početne aproksimacije za složenije numeričke metode.

SUMMARY

TRAFFIC DEVELOPMENT PROJECTIONS BY LOGISTIC TRENDS

For projections of the traffic development dynamics up to and after the year 1992 we can use the logistic trends if the observed (monitored) traffic feature exhibits typical development stages: running-in, pronounced expansion and stagnating development stage. This paper deals with the presentation of the criteria for the selection of this trend and less complex methods for the projection of parameters in it.

LITERATURA

- [1] K. L. RIHTER: Transportnaja ekonometrija. Moskva, Transport, 1983, str. 15.
- [2] E. M. ČETYRKIN, I. L. KALIHMAN: Vjerojatnost i statistika. Moskva, Finansy i statistika, 1982., str. 297.
- [3] E. BÖHM: Vorausschätzung der langfristigen Bedarfs an Fernsprechhauptanschlüssen mit Hilfe eines logistischen Koordinatennetzes. NTZ, 19, 1966, 605-613.